

DOI: 10.16285/j.rsm.2015.10.003

一维对流-扩散试验各种边界条件 及其统一形式解析解

张文杰, 赵 培, 贾文强

(上海大学 土木工程系, 上海 200072)

摘 要: 黏土系材料广泛应用于各种污染防治工程, 扩散系数是其关键参数之一, 实验室一般通过拟合一维土柱对流-扩散试验数据来确定土的扩散系数。探讨了常用的零浓度边界、零浓度梯度边界和半无限边界对应的试验条件, 给出了各边界条件的统一形式, 通过引入变换式和辅助问题, 求解得到各边界条件下统一的有限厚度土层中对流-扩散-吸附解析解, 分析了各解析解之间的差异和用于数据拟合产生的误差。结果表明, 每一种底边界条件都与土柱试验底部的实际情况相对应, 柯西边界可看作各种边界条件的统一形式; 土柱未被击穿时各边界条件解析解无差别; 土柱击穿后, 越靠近土柱底面, 各种边界条件解析解计算结果差异越大, 底面处浓度值随柯西参数 μ/λ 的增大而减小, μ/λ 越大, 代表底边界处扩散在溶质迁移中所占比例越大, 同时底部浓度梯度越大; 算例中对底部为半无限边界的试验数据进行拟合, 若采用零浓度边界和零浓度梯度边界, 计算结果分别偏大 15% 和偏小 9%, 根据土柱底部的对流-扩散比例和浓度梯度具体情况选择相应边界条件下的解析解, 是保证数据拟合正确性的基本要求。

关 键 词: 对流-扩散; 土柱试验; 边界条件; 统一形式解析解

中图分类号: TU 411

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2015) 10-2759-06

Boundary conditions of one-dimensional convection-diffusion column tests and unified analytical solution

ZHANG Wen-jie, ZHAO Pei, JIA Wen-qiang

(Department of Civil Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: Clay-based materials are widely used in practice of contaminant control. Diffusion coefficient is one of the most important parameters of clay. It is usually determined by fitting the data of one-dimensional convection-diffusion soil column tests. Zero concentration boundary, zero concentration-gradient boundary and semi-infinite boundary are discussed. A unified boundary condition is proposed. By transforming and introducing auxiliary problems, unified convection-diffusion-adsorption analytical solutions for three boundary conditions are acquired. Both difference between these analytical solutions and data-fitting errors are investigated. The results show that different boundaries should correspond to different conditions in the bottom of a column test. Cauchy boundary can be regarded as an unified form of all these boundaries. The calculated results corresponding to these boundaries are equivalent before breakthrough, however, the results become quite different in the bottom of the column after breakthrough. The concentration decreases as Cauchy parameter μ/λ increases. The bigger the Cauchy parameter μ/λ is, the more dominant role the diffusion effect plays in the solute transport process, at the same time, the bigger the concentration gradient at the bottom is. Fitting the data of a semi-infinite boundary test using analytical solutions of zero concentration boundary and zero concentration-gradient boundary will overestimate 15% and underestimate 9% of the result, respectively. It is essential for data fitting to choose an analytical solution according to convection-diffusion proportion and concentration-gradient at the bottom of a soil column.

Keywords: convection-diffusion; column test; boundary condition; unified analytical solution

1 引 言

压实黏土衬垫或黏土类防渗屏障广泛应用于填

埋场及其他污染控制领域, 除压实土料的渗透系数外, 扩散和吸附性能对污染防控效果都有显著影响。室内土柱对流-扩散试验常用来研究各种黏土类屏

收稿日期: 2014-12-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51178260, No. 51478256); 上海市教委科研创新项目 (No. 14YZ005)。

第一作者简介: 张文杰, 男, 1978 年生, 博士, 副教授, 主要从事环境土工方面的研究工作。E-mail: wjzhang2008@gmail.com

障材料中污染物的迁移规律,通过对试验数据的拟合分析,可以确定扩散系数和阻滞因子。获取用于拟合的试验数据有两种方法:一种是截面分析,即经过一定试验历时后切片测试,获取溶质浓度沿深度变化曲线,该方法的优点是土柱不必完全击穿,因此,试验历时相对短;另一种是累积浓度法^[1],获得累积出流浓度随时间变化曲线,该法操作简单,但通常需要使出流浓度达到源浓度以获得完整的击穿曲线,因此,试验历时要长得多。试验数据的拟合多采用一维对流-扩散解析解^[2-4],然而不同边界条件对应不同的解析解,采用何种边界条件关系到数据拟合结果的正确性或者准确程度。

Shackelford^[5-6]使用半无限边界解析解拟合土柱试验数据,认为土柱高度范围内溶质浓度可以用无限远处浓度梯度为 0 的解析解来求;Barry 等^[7-8]在对上文的讨论中提出不同意见,认为如果自由出流边界的溶液收集方法导致出流不连续,土柱底部应采用零浓度梯度或零浓度边界,且二者等价^[9];Rabideau 等^[10]认为,零浓度梯度边界不适合低渗流速度的情形,若存在垂直于扩散方向的水流,则应采用零浓度边界;余闯^[11]、谢海建^[12]等建立了污染物一维扩散解析解并进行验证,其下边界均采用零浓度边界;詹良通等^[13]拟合土柱离心试验数据时使用了半无限边界的解析解。由此可见,国内外学者在进行土柱试验数据拟合或验证解析解时采用了不同的边界条件。边界条件到底该如何选择?使用不同边界条件解析解进行数据拟合产生的误差是否可以忽略等问题尚需进一步研究。

本文探讨了土柱试验通常涉及到的边界条件及其适用条件,给出了统一形式的边界条件,并求得统一形式的有限厚度土层对流-扩散-吸附解析解,通过算例对比了各边界条件解析解计算结果的差异,分析了因采用不同边界条件进行数据拟合产生的误差。

2 土柱试验的边界条件

一维土柱试验中,因对流和扩散引起的溶质通量可表达为^[5]

$$J = J(z, t) = \theta \left[v c_r(z, t) - D \frac{\partial c_r(z, t)}{\partial z} \right] \quad (1)$$

式中: J 为土孔隙流体中溶质通量; θ 为体积含水率,对于饱和土 θ 等于孔隙率 n ; v 为孔隙水流速,通常认为, $v = V/\theta$, V 为达西流速; c_r 为土孔隙流体中溶质浓度; z 为从土柱顶面开始算起的溶质

运移距离(向下为正); t 为时间; D 为水动力弥散系数,是同时考虑分子扩散和机械弥散的综合参数。

考虑溶质质量守恒,由连续性条件知:

$$\frac{\theta R_d \partial c_r(z, t)}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial z} \quad (2)$$

式中: R_d 为考虑线性吸附的阻滞因子。

联立式(1)、(2),即得到考虑对流、扩散和吸附的土柱中溶质一维运移控制方程:

$$D \frac{\partial^2 c_r(z, t)}{\partial z^2} - v \frac{\partial c_r(z, t)}{\partial z} = R_d \frac{\partial c_r(z, t)}{\partial t} \quad (3)$$

若忽略背景浓度,则初始条件为

$$c_r(z, 0) = 0 \quad (4)$$

为便于拟合分析,通常试验的土柱顶面采用溶液循环方法,或放置足够体积的已知浓度溶液,以保证在试验过程中入流浓度不变或近似不变,因此,上边界条件为

$$c_r(0^+, t) = c_0 \quad (5)$$

式中: 0^+ 为土柱上表面内侧的入流边界。

底边界条件较复杂,根据试验方法和底部出流条件,分为零浓度边界、自由出流边界、半无限边界、柯西边界 4 种。

2.1 零浓度边界

当土柱底部有与底面平行流动的纯水,流速和流量足够时,流水将溶质从土柱底面带走的速度足够快,或者土柱底面处的流动不连续,此时底面边界可设置为零浓度边界:

$$c_r(H, t) = 0 \quad (6)$$

式中: H 为试样厚度。

此时,底面孔隙中的溶质能完全扩散至边界外,这一边界条件也称 Dirichlet 边界,试验中土柱底部以纯水循环可(接近)实现此边界。在试验初期,溶质远未迁移至底面附近,底面处浓度和浓度梯度均为 0,可用此边界条件对应的解析解拟合试验数据;而当试验进行足够长时间后,此边界条件对应的底面处浓度梯度为(负)无穷大,而浓度仍为 0,这与实际不符,因为土柱击穿后底面内边界会有少量溶质积聚,特别是土柱内溶质迁移以对流为主导时,此时内边界浓度不为 0。因此,对应的边界条件应表述为

$$c_r(H^+, t) = 0 \quad (7)$$

式中： H^+ 为土柱底面外边界。

2.2 自由出流边界

当底面处仅水压力梯度不为 0，即扩散作用相比对流来说可以忽略时，定义底部为自由出流边界，此时出流溶质的浓度梯度为 0：

$$\frac{\partial c_f(z,t)}{\partial z} = 0, z = H \quad (8)$$

式中： c_f 为某时段内按出流量计算的平均浓度，当土柱内溶质迁移以对流为主导时， c_f 与 c_r 接近，随对流作用比例下降， c_f 与 c_r 之间的差异增大，流量为 0 即纯扩散时 c_f 无意义。用 Péclet 特征数 Pe 表示对流与扩散在溶质迁移中所占比例，Parlange 等^[14]认为，当 $Pe > 4$ 时，近似有 $c_f = c_r$ ，此时边界条件为

$$\frac{\partial c_r(z,t)}{\partial z} = 0, z = H \quad (9)$$

这一边界也称为 Neumann 边界。通常土柱试验在完全击穿（以源浓度出流）之前，底面后出流的溶液浓度大于先前出流的溶液，因此，浓度梯度不为 0，但若底边界处孔隙中的溶液能被及时吸走，则底边界处没有浓度差，即不发生扩散，此时可认为浓度梯度为 0，故此边界也被称为完全吸收边界，对应一个理想状态。通常粗颗粒土料的土柱试验较多采用这一边界条件下的解析解进行拟合，但试验时应控制对流为主导，并注意底部浓度梯度，以接近这一边界的上述物理本质，而当土料渗透系数很小，以扩散为主导时，边界处孔隙中的溶液不易排出，不宜采用此边界。

2.3 半无限边界

半无限边界是指在无限深度处浓度梯度为 0：

$$\frac{\partial c_r(z,t)}{\partial z} = 0, z = \infty \quad (10)$$

土柱试验中若土柱底部与收集到的出流溶液相接触，且出流溶液的浓度测量采用下面两种方式：一是出流达到一定体积后从底部移除并测量将之作为这段时间的平均出流浓度；二是持续测量累积浓度，在这两种情况下，底边界内外浓度均不同，即浓度梯度不为 0。边界条件式 (10) 对应的解析解在 $z = H$ 处的浓度梯度不为 0，取某时刻 t 的浓度计算值可拟合浓度剖面，取 $z = H$ 处的浓度计算值可拟合平均出流浓度，或经变换后用于拟合累积浓度^[1]。虽然式 (10) 定义无限远处的边界，但拟合时流速 v 已知，此定义与对流无关，拟合造成的误差仅来源于底边界的扩散速度，即式 (10) 确定的底边界处

浓度梯度值与试验操作对应的真实浓度梯度之间的误差。

2.4 柯西边界

由上述可知，当土柱底部被击穿时，无论零浓度边界（对应浓度梯度为无穷大）还是自由出流边界（对应浓度梯度为 0）均基于理想假定，实际上土柱试验在击穿后底边界处浓度不为 0，而浓度梯度一般处于 0 与负无穷大之间，且出流浓度和浓度梯度并非固定值，这样的边界称为混合边界，即 Cauchy 边界：

$$\lambda \frac{\partial c_r(z,t)}{\partial z} + \mu c_r(z,t) = 0, z = H \quad (11)$$

式中： μ 、 λ 为描述边界条件的参数。 λ 正比于扩散系数，通常不为 0，这样，当接触参数 μ 趋向无限大，式 (11) 退化成零浓度边界，当 $\mu = 0$ ，式 (11) 退化成零浓度梯度边界， μ 取其他值时表示底边界处浓度和浓度梯度均不为 0，且浓度梯度值随浓度而变化。因此，式 (11) 可以看做各边界条件的统一形式。式中的两个参数 μ 、 λ 实际上可用一个值 μ/λ 表示（单位为 $1/m$ ），称为 Cauchy 边界参数。

3 统一形式边界条件下的解析解

由式 (3) ~ (5)、(11) 定义的数学模型无法直接求解，可通过变换式

$$c_r(z,t) = W(z,t) e^{\frac{v}{2D}z - \frac{v^2}{4DR_d}t} \quad (12)$$

将原问题转换成一个关于 $W(z,t)$ 的问题，其中 $W(z,t)$ 满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{R_d} \frac{\partial^2 W(z,t)}{\partial z^2} &= \frac{\partial W(z,t)}{\partial t}, 0 < z < H \\ W(0,t) &= c_0 e^{\frac{v^2}{4DR_d}t}, t > 0 \\ \frac{\partial W(z,t)}{\partial z} + \chi W(z,t) &= 0, z = H \\ W(z,0) &= 0, 0 \leq z \leq H \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中，

$$\chi = \frac{v}{2D} + \frac{\mu}{\lambda} \quad (14)$$

由于 $W(z,t)$ 问题的上边界条件与时间有关，故引入辅助问题 $\Phi(z,t,\tau)$

$$\Phi(z,t,\tau) = \Phi_1(z,\tau) + \Phi_2(z,t,\tau) \quad (15)$$

其中, $\Phi_1(z, \tau)$ 为稳态非齐次问题, 表述为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_1(z, \tau)}{dz^2} &= 0, \quad 0 < z < H \\ \Phi_1(z, \tau) &= c_0 e^{\frac{v^2}{4DR_d} \tau}, \quad z = 0 \\ \frac{d\Phi_1(z, \tau)}{dz} + \chi \Phi_1(z, \tau) &= 0, \quad z = H \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$\Phi_2(z, t, \tau)$ 为齐次非稳态问题, 表述为

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{R_d} \frac{\partial^2 \Phi_2(z, t, \tau)}{\partial z^2} &= \frac{\partial \Phi_2(z, t, \tau)}{\partial t}, \quad 0 < z < H \\ \Phi_2(0, t, \tau) &= 0, \quad t > 0 \\ \frac{\partial \Phi_2(z, t, \tau)}{\partial z} + \chi \Phi_2(z, t, \tau) &= 0, \quad z = H \\ \Phi_2(z, 0, \tau) &= -\Phi_1(z, \tau), \quad 0 \leq z \leq H \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

求解式 (16)、(17) 分别得到 $\Phi_1(z, \tau)$ 和 $\Phi_2(z, t, \tau)$, 再由式 (15) 得到

$$\begin{aligned} \Phi(z, t, \tau) &= c_0 e^{\frac{v^2}{4DR_d} \tau} \frac{1 + \chi(H - z)}{1 + \chi H} + \\ &c_0 e^{\frac{v^2}{4DR_d} \tau} \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{\frac{-D\beta_m^2 t}{R_d}} \sin(\beta_m z) \end{aligned} \quad (18)$$

将 $\Phi(z, t, \tau)$ 写为

$$\begin{aligned} \Phi(z, t - \tau, \tau) &= c_0 e^{\frac{v^2}{4DR_d} \tau} \frac{1 + \chi(H - z)}{1 + \chi H} + \\ &c_0 e^{\frac{v^2}{4DR_d} \tau} \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{\frac{-D\beta_m^2 (t - \tau)}{R_d}} \sin(\beta_m z) \end{aligned} \quad (19)$$

对式 (19) 应用哈梅定理

$$W(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(z, t - \tau, \tau) d\tau \quad (20)$$

可得

$$\begin{aligned} c_r(z, t) &= c_0 e^{\frac{v}{2D} z} \frac{1 + \chi(H - z)}{1 + \chi H} + c_0 \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{\frac{v}{2D} z} \sin(\beta_m z) \cdot \\ &\left(\frac{v^2}{4D} + D\beta_m^2 \right)^{-1} \left[\frac{v^2}{4D} + D\beta_m^2 e^{\left(\frac{v^2}{4DR_d} + \frac{D\beta_m^2}{R_d} \right) t} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) 即柯西边界条件下的解析解。式中:
 m 为级数项数; c_m 、 β_m 分别为

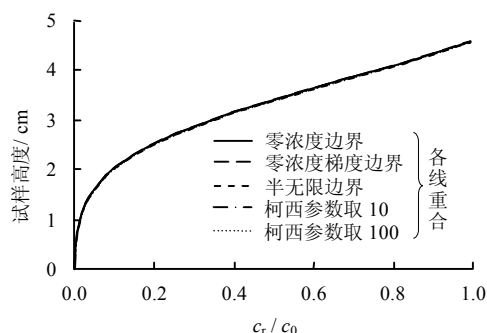
$$\begin{aligned} c_m &= \frac{2(\beta_m^2 + \chi^2)}{H\beta_m(\beta_m^2 + \chi^2) + \chi\beta_m} \left\{ \frac{\chi}{1 + \chi H} \cdot \right. \\ &\left. \left[\frac{\sin(\beta_m H)}{\beta_m} - H \cos(\beta_m H) \right] + \cos(\beta_m H) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\beta_m \cot(\beta_m H) = -\chi \quad (23)$$

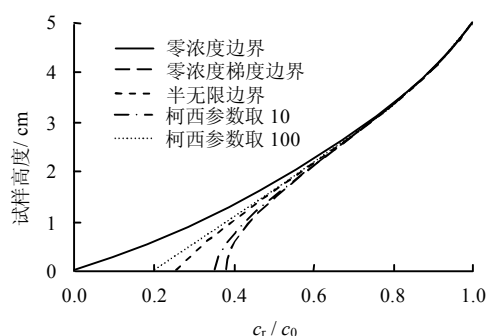
Péclet 数 Pe 常对有限域级数解的敛散性有较大影响, 满足收敛所需的项数 m 随 Pe 增大而增大, 依据此级数形式解析解编制简单程序, 其中 m 取 20 000, 可计算 $Pe = 30$ 对流为主导的问题。

4 不同边界条件解析解对比及拟合误差分析

式 (21) 对应的边界条件是前述各种边界条件的统一形式, 因此, 可以方便地对比不同边界条件下解析解的差别。算例中取土柱高度 $H = 5$ cm; 孔隙水流速 $v = 3 \times 10^{-6}$ cm/s; 水动力弥散系数 $D = 5 \times 10^{-6}$ cm²/s; 忽略吸附作用, 取 $R_d = 1$; 试样顶部为常浓度边界, 底部分别取上述各种边界; 模拟溶质运移时间分别为 2、9 d。计算得到 2、9 d 后溶质浓度分布剖面分别如图 1(a)、1(b) 所示。



(a) 2 d



(b) 9 d

图 1 不同底部边界条件解析解对比
Fig.1 Analytical solutions for different boundary conditions

图 1(a) 为溶质运移 2 d 后的浓度剖面线, 可见土柱未被击穿 (击穿指试样底部出流达到某个浓度值或相对浓度值), 图中各剖面线重合, 说明此时各种边界条件下解析解结果相同。此时若使用解析解拟合试验数据, 使用各边界条件均可, 不存在差别。

但需要指出的是, 为了获得尽可能多的有效 (非零的) 数据点, 以减小数据拟合误差, 土柱试验通常进行到底部达到一定击穿浓度才终止。

图 1(b) 为溶质运移 9 d 后的浓度剖面线, 此时土柱已被击穿, 可见在试样上半部分各边界对应解析解的浓度基本接近, 在试样下半部分各解差异较大, 其中零浓度边界对应的底部浓度最低, 零浓度梯度边界对应的浓度最高, 半无限边界、柯西参数 μ/λ 取 10 和 100 的边界对应的浓度居中。如前所述, 零浓度边界假定底部能充分扩散, 与式 (21) 中 $\mu/\lambda = \infty$ 的解相对应; 半无限边界假定底边界处存在有限的扩散作用, 本算例中与 $\mu/\lambda = 57$ 的解答一致; 零浓度梯度边界假定扩散为 0, 与 $\mu/\lambda = 0$ 的解相对应。因此, 计算所得底部边界处的浓度随底部浓度梯度的增大而减小, 也随柯西边界参数 μ/λ 的增大而减小; μ/λ 越大, 代表底边界处扩散在溶质迁移中所占比例越大, 亦即底部浓度梯度越大。

试验采取何种边界条件解析解拟合, 应根据试验时底部边界处的具体情况, 即综合考虑对流-扩散比例和浓度梯度情况来确定。若底部保持为纯水, 则击穿后浓度梯度很大, 接近零浓度边界的情形; 若扩散为主导, 土样底部接触出流溶液, 测出流溶液的累积浓度, 此时边界浓度梯度大于下为无限土层的情形, 则采用 μ/λ 取较大值 (如图 1 中取 100) 的边界; 若土样底部接触出流溶液, 出流溶液移除频率较高, 则对应半无限边界; 若土样底部不接触出流溶液, 土的渗透性较好, 底部孔隙中的溶液不积聚, 则采用 μ/λ 取较小值 (如图 1 中取 10) 的边界; 若底部边界处扩散可以忽略, 即符合自由出流条件, 则采用零浓度梯度边界。

如某土柱试验为黏土试样, 土样底部为透水石接出流管, 则属前述底部接触出流溶液且出流溶液能及时移走的情形, 对应 (或接近) 半无限边界。此处目的在于分析使用不同边界条件解析解拟合造成的误差, 为了排除试验操作及数据本身离散性的误差影响, 以半无限边界解析解数据为基准。取土柱高度 $H = 5 \text{ cm}$, 采用惰性溶质 (取 $R_d = 1$), 已知孔隙水流速 $v = 1.7 \times 10^{-6} \text{ cm/s}$, 试验 20 d 后的溶质浓度分布剖面如图 2 中圆点所示, 要拟合求水动力弥散系数 D 。拟合需满足所有基准点处浓度拟合值与基准值之差的平方和最小, 编制简单程序采用步进搜索方法^[15]求得最佳拟合值。使用无限边界的解析解拟合得到 $D = 1.45 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ (基准解)。若用零浓度边界拟合, 得到 $D = 1.67 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$, 偏大 15%,

且拟合残差较大; 若用零浓度梯度边界拟合, 得到 $D = 1.32 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$, 虽然拟合残差很小, 但拟合值仍偏小 9%, 误差不容忽视。因此, 根据试验的边界条件合理选择解析解进行数据拟合, 不仅是理论上的需要, 也是数据处理准确性的需要。

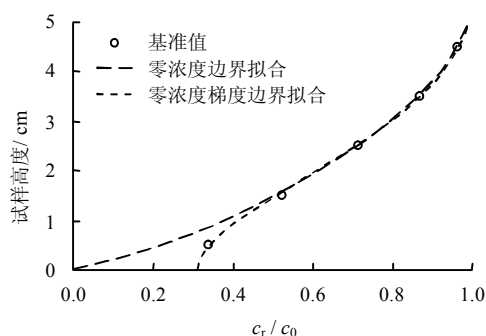


图 2 不同底部边界条件解析解拟合结果
Fig.2 Fitting curves of analytical solutions for different boundary conditions

5 结 论

(1) 土柱试验数据可用零浓度边界、零浓度梯度边界、半无限边界对应的解析解来模拟, 每一种边界条件都与实际的试验条件相对应。

(2) 柯西边界可看做各种边界条件的统一形式, 此边界条件下的微分方程无法直接求解, 通过引入变换式和辅助问题, 求解得到适用于各种底边界条件的有限厚度土层中考虑对流、扩散、吸附的污染物运移统一形式解析解。

(3) 算例表明, 土柱未被击穿时各边界条件解析解无差别; 土柱被击穿后, 越靠近土柱底面, 各种边界条件解析解计算结果差异越大, 底面处浓度值随柯西参数 μ/λ 的增大而减小, μ/λ 越大, 代表底边界处扩散在溶质迁移中所占比例越大, 亦即底部浓度梯度越大, 这是选择何种边界条件解析解进行试验数据拟合的依据。

(4) 拟合试验数据求水动力弥散系数时, 根据试验时土柱底部的对流-扩散比例和浓度梯度具体情况, 选择相应的边界条件解析解, 不仅是理论上的需要, 也是显著减小误差的需要。

参 考 文 献

- [1] SHACKELFORD C D. Cumulative mass approach for column testing[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1995, 121(10): 696—703.
- [2] PARKER J C, VAN GENUCHTEN M T. Flux-averaged and volume-averaged concentrations in continuum

- approaches to solute transport[J]. **Water Resources Research**, 1984, 20(7): 866—872.
- [3] SHACKELFORD C D. Transit-time design of earthen barriers[J]. **Engineering Geology**, 1990, 29(1): 79—94.
- [4] ACAR Y B, HAIDER L. Transport of low-concentration contaminants in saturated earthen barriers[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1990, 116(7): 1031—1052.
- [5] SHACKELFORD C D. Critical concepts for column testing[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1994, 120(10): 1804—1828.
- [6] SHACKELFORD C D, PATRICK L R. Solute break through curves for processed kaolin at low flow rates[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1995, 121(1): 17—32.
- [7] BARRY D A, ANDERSON S J. Discussion of ‘Critical concept for column testing’[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1996, 122(1): 84—87.
- [8] BARRY D A, ANDERSON S J. Discussion of ‘Solute break through curves for processed kaolin at low flow rates’[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1996, 122(9): 781—785.
- [9] BARRY D A, SPOSITO G. Application of the convection-dispersion model to solute transport in finite soil columns[J]. **Soil Science Society of American Journal**, 1988, 52(1): 3—9.
- [10] RABIDEAU A, KHANDELWAL A. Boundary condition for modeling transport in vertical barriers[J]. **Journal of Environmental Engineering**, 1998, 124(11): 1135—1139.
- [11] 余闯, 方冬芳, 杜广印, 等. 均质土中考虑溶质蜕变效应的污染物迁移模型的解析解[J]. **东南大学学报(自然科学版)**, 2012, 42(6): 1206—1210.
- YU Chuang, FANG Dong-fang, DU Guang-yin, et al. Analytical solution on pollutant migration considering solute decay in homogeneous soil[J]. **Journal of Southeast University (Natural Science Edition)**, 2012, 42(6): 1206—1210.
- [12] 谢海建, 唐晓武, 陈云敏, 等. 原始土层影响下成层介质污染物一维扩散模型[J]. **浙江大学学报(工学版)**, 2006, 40(12): 2191—2195.
- XIE Hai-jian, TANG Xiao-wu, CHEN Yun-min, et al. One-dimensional model for contaminant diffusion through layered media[J]. **Journal of Zhejiang University (Engineering Science)**, 2006, 40(12): 2191—2195.
- [13] 詹良通, 曾兴, 陈云敏. 惰性污染物在低渗透性黏土中弥散作用离心模拟的相似研究[C]//第七届全国岩土工程物理模拟学术研讨会论文集. 杭州: [s. n.], 2013: 131—137.
- [14] PARLANGE J Y, STARR J L, VAN GENUCHTEN M T, et al. Exit condition for miscible displacement experiments[J]. **Soil Science**, 1992, 153(3): 165—171.
- [15] 张文杰, 贾文强, 张改革, 等. 黏土-膨润土屏障中氯离子对流扩散规律研究[J]. **岩土工程学报**, 2013, 35(11): 2076—2081.
- ZHANG Wen-jie, JIA Wen-qiang, ZHANG Gai-ge, et al. Research on advection and dispersion of Cl^- in clay-bentonite barriers[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(11): 2076—2081.
- [17] 孙曦源, 栾茂田, 唐小微. 饱和软黏土地基中桶形基础水平承载力研究[J]. **岩土力学**, 2010, 31(2): 667—672.
- SUN Xi-yuan, LUAN Mao-tian, TANG Xiao-wei. Study of horizontal bearing capacity of bucket foundation on saturated soft clay ground[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(2): 667—672.
- [18] 施晓春, 徐日庆, 龚晓南, 等. 桶形基础单桶水平承载力的试验研究[J]. **岩土工程学报**, 1999, 21(6): 723—726.
- SHI Xiao-chun, XU Ri-qing, GONG Xiao-nan, et al. Experimental study on horizontal bearing capacity of single bucket foundation[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1999, 21(6): 723—726.
- [19] 刘振纹, 王建华, 秦崇仁, 等. 负压桶形基础地基水平承载力研究[J]. **岩土工程学报**, 2000, 22(6): 691—695.
- LIU Zhen-wen, WANG Jian-hua, QIN Chong-ren, et al. Research on the horizontal bearing capacity of bucket foundations[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2000, 22(6): 691—695.

上接第 2758 页